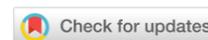


# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

## CONSTRUCTION MECHANICS



УДК 624.44:539.376

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2949-1835-2025-4-1-54-67>



EDN: KDXNZY

### Примеры тестирования программы моделирования длительного деформирования предварительно напряженных железобетонных балок

П.П. Гайджуров<sup>1</sup> , Э.Р. Исакова<sup>2</sup> , Н.А. Савельева<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

<sup>2</sup> Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, г. Новочеркасск, Российская Федерация

✉ [gpp-161@yandex.ru](mailto:gpp-161@yandex.ru)

#### Аннотация

**Введение.** В настоящее время в отечественной литературе приведено крайне мало сведений о разработке и применении на практике численных методов исследования напряженно-деформированного состояния бетонных и железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона. Как правило, при анализе длительного деформирования подобных конструкций расчетчики применяют эмпирический подход, основанный на использовании коэффициента ползучести. Цель настоящего исследования заключается в верификации и валидации разработанного конечно-элементного алгоритма и соответствующего программного обеспечения на базе имеющихся в литературе результатов экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния предварительно напряженных железобетонных балочных конструкций с учетом ползучести бетона.

**Материалы и методы.** В качестве математического аппарата для моделирования процесса длительного деформирования железобетонных балочных конструкций применен метод конечных элементов в сочетании с шаговой процедурой численного интегрирования по временной координате результирующего операторно-матричного уравнения. Программный код реализован на базе вычислительной платформы Microsoft Visual Studio и компилятора Intel Parallel Studio XE со встроенным текстовым редактором Intel Visual Fortran Composer XE. Процессы хранения и обработки рабочих массивов реализованы в терминах разреженных матриц. Для визуализации результатов расчетов использована дескрипторная графика компьютерной системы Matlab. Все вычислительные эксперименты выполнены с помощью авторизованного комплекса Polygon. В задачи исследования входит оценка точности предлагаемой методики анализа длительного деформирования железобетонных конструкций при различных способах внешнего силового воздействия, включая эффект предварительного напряжения.

**Результаты исследования.** Разработана и отлажена программа расчета железобетонных балочных конструкций в трехмерной постановке с использованием дискретной схемы армирования, согласно которой армирующий каркас моделируется стержневыми (балочными) конечными элементами, а массив бетона — объемными. Для определения восстанавливающего усилия, обусловленного натяжением тросовой арматуры на бетон, применена двухмерная конечно-элементная модель, состоящая из ферменных и пружинных конечных элементов. Моделирование длительного деформирования выполнено в рамках теории линейной вязкоупругости в сочетании с принципом наложения воздействий.

**Обсуждение и заключение.** Выполнен сравнительный анализ результатов натурных и вычислительных экспериментов исследования напряженно-деформированного состояния железобетонных балок прямоугольного поперечного сечения с пост- и преднапряжением. Предлагаемая методика позволяет выполнить расчет предварительно напряженных железобетонных балочных конструкций при переменном характере квазистатического нагружения с учетом линейной ползучести бетона.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, ползучесть бетона, предварительное напряжение, железобетонные балочные конструкции

Для цитирования. Гайдзуров П.П., Исхакова Э.Р., Савельева Н.А. Примеры тестирования программы моделирования длительного деформирования предварительно напряженных железобетонных балок. *Современные тенденции в строительстве, градостроительстве и планировке территорий*. 2025;4(1):54–67. <https://doi.org/10.23947/2949-1835-2025-4-1-54-67>

Original Empirical Research

## Examples of Testing a Program for Modeling Long-Term Deformation of Prestressed Reinforced Concrete Beams

Peter P. Gaydzhurov<sup>1</sup>  , Elvira R. Iskhakova<sup>2</sup> , Nina A. Savelyeva<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

<sup>2</sup> South Russian State Polytechnic University (NPI) named after M.I. Platov, Novocherkassk, Russian Federation

 [gpp-161@yandex.ru](mailto:gpp-161@yandex.ru)

### Abstract

**Introduction.** Currently, there is very little information in the Russian literature on the development and practical application of numerical methods for studying the stress-strain state of concrete and reinforced concrete structures, taking into account the creep of concrete. As a rule, when analyzing the long-term deformation of such structures, calculators apply an empirical approach based on the use of the reduced modulus of deformation in combination with the coefficient of creep. The purpose of this study is to verify and validate the developed finite element algorithm and the corresponding software based on the results of experimental studies of the stress-strain state, prestressed reinforced concrete beam structures, taking into account the creep of concrete, available in the literature.

**Materials and Methods.** As a mathematical tool for modeling the process of long-term deformation of reinforced concrete girder structures, the finite element method was used in combination with a simple procedure for numerical integration along the time coordinate of the operator-matrix resulting equation. The program code is implemented on the basis of the Microsoft Visual Studio computing platform and the Intel Parallel Studio XE compiler with the built-in Intel Visual Fortran Composer XE text editor. The processes of storing and processing working arrays are implemented in terms of sparse matrices. The descriptive graphics of the Matlab computer system were used to visualize the calculation results. All of the computational experiments were performed using the authorized Polygon complex. The objectives of the study include evaluating the accuracy of the proposed methodology for analyzing the long-term deformation of reinforced concrete structures with various methods of external force action, including the effect of prestressing.

**Results.** A program for calculating reinforced concrete beam structures in a three-dimensional formulation has been developed and debugged using a discrete reinforcement scheme, according to which the reinforcing frame is modeled by rod (beam), and the concrete array by volumetric finite elements. To determine the restoring force caused by the tension of the cable reinforcement on concrete, a two-dimensional finite element model consisting of truss and spring finite elements is used. The simulation of long-term deformation was performed within the framework of the theory of linear viscoelasticity in combination with the principle of superposition of influences.

**Discussion and Conclusion.** A comparative analysis of the results of field and computational experiments on the stress-strain state of reinforced concrete beams of rectangular cross-section with post- and prestress is performed. The proposed method makes it possible to calculate prestressed reinforced concrete girder structures with variable quasi-static loading, taking into account the linear creep of concrete.

**Keywords:** finite element method, creep of concrete, pre-tensile stress, reinforced concrete girder structures

**For citation.** Gaydzhurov PP, Iskhakova ER, Savelyeva NA. Examples of Testing a Program for Modeling Long-Term Deformation of Prestressed Reinforced Concrete Beams. *Modern Trends in Construction, Urban Planning and Territorial Planning*. 2025;4(1):54–67. <https://doi.org/10.23947/2949-1835-2025-4-1-54-67>

**Введение.** Общеизвестно, что бетон на протяжении последних двух столетий является самым распространенным строительным материалом. На основе высокопрочного бетона, конструктивно армированного стальным каркасом, по всему миру возведены сотни уникальных высотных зданий, изготовлены морские платформы для добычи углеводородов, выполнены защитные оболочки атомных реакторов. Без бетона трудно представить существование гидроэнергетики, большепролетных мостов, метрополитена, масштабных автомагистральных развязок и транспортных туннелей. Вместе с тем, в отличие от не менее распространенной в строительстве стали, бетон в значительно большей степени подвержен деформации ползучести, которая существенно зависит от «возраста» связующего материала, размеров конструкции, характера и последовательности приложения или снятия внешней

нагрузки, а также температурно-влажностного состояния среды. Экспериментально установлено, что ползучесть существенно влияет на перераспределение внутренних усилий в бетонных и железобетонных конструкциях. При этом перемещения, обусловленные деформацией ползучести, могут в несколько раз превышать перемещения, вызванные приложением нагрузки в начальный момент времени. В настоящее время накоплен значительный экспериментальный и теоретический материал по ползучести бетона. Вместе с тем известные подходы к расчету бетонных и железобетонных конструкций с учетом ползучести ориентированы главным образом на решение задач с относительно простой геометрией изделия и не учитывают технологической предыстории, связанной с образованием начального напряженного состояния и эффекта наследования напряженно-деформированного состояния, обусловленного историей нагружения конструкции. Поэтому актуальной является проблема разработки более общего конечно-элементного алгоритма, реализующего модель упруго ползучего тела, позволяющую учитывать эффект быстро нарастающей ползучести в момент приложения эксплуатационной нагрузки, частичную обратимость деформации ползучести при снятии длительно действовавшей нагрузки (упругое последствие), различные способы и схемы преднапряжения арматуры.

Цель исследования состоит в тестировании авторизированного конечно-элементного программного комплекса путем сравнения полученных результатов с данными других авторов.

**Материалы и методы.** В соответствии с постулатом Г.Н. Маслова — Н.Х. Арутюняна полную относительную продольную деформацию  $\delta(t, \tau)$  бетонного образца призматической формы при сжатии принято представлять в виде суммы [1–4]:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} + C(t, \tau),$$

где  $\tau$  — параметр, соответствующий «возрасту» бетона;  $\frac{1}{E(t)}$  — упруго-мгновенная деформация образца;  $E(t)$  — текущее значение модуля деформации;  $C(t, \tau)$  — деформация ползучести к моменту времени наблюдения  $t$  ( $\tau \leq t < \infty$ ).

Функцию  $C(t, \tau)$  принято называть мерой ползучести. В зависимости от вида функции  $C(t, \tau)$  деформация ползучести после разгрузки может быть полностью или частично обратимой [5]. Как отмечается в [1, 3, 4] функцию  $E(t)$  удобно аппроксимировать зависимостью:

$$E(t) = E_0(1 - \xi e^{-\beta t}),$$

где  $E_0$  — предельное значение модуля упругости бетона «зрелого возраста».

Параметры  $\xi$ , входящие в выражение  $E(t)$ , определяются опытным путем и зависят от состава и условий твердения бетона.

Выражения для функции меры ползучести:

– Н.Х. Арутюняна [1]:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]; \quad (1)$$

– С.В. Александровского [3]:

$$C(t, \tau) = \psi(\tau) - \psi(t) \left( \frac{1 - A_2 e^{-\gamma t}}{1 - A_2 e^{-\gamma \tau}} \right) e^{-\gamma(t-\tau)} + \Delta(\tau)[1 - e^{-\alpha(t-\tau)}]. \quad (2)$$

Здесь быстро убывающие функции:

$$\varphi(\tau) = C_1 + \frac{A_1}{\tau}, \psi(\tau) = C_3 + \frac{A_3}{\tau}, \Delta(\tau) = C_1 - C_3 + \frac{A_1 - A_3}{\tau}.$$

Отметим, что функция  $\varphi(\tau)$  была впервые предложена Н.Х. Арутюняном [1]. График функции  $\varphi(\tau)$  для различных значений параметров  $C_1$  и  $A_1$  приведен на рис. 1. На этом рисунке кривые  $\varphi(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  стремятся к предельному значению  $C_1/A_1$ .

Константы в выражениях (1) и (2) в единицах измерения, принятых в [3]:

$$\alpha = 6 \text{ сут}^{-1}; \gamma = 0,03 \text{ сут}^{-1}; A_1 = 4,62 \cdot 10^{-5} \frac{\text{сум}}{\text{кгс/см}^2} (4,7095 \cdot 10^{-10} \frac{\text{сум}}{\text{Н/м}^2});$$

$$A_2 = 1; A_3 = 3,416 \cdot 10^{-5} \frac{\text{сум}}{\text{кгс/см}^2} (3,48226 \cdot 10^{-10} \frac{\text{сум}}{\text{Н/м}^2}); C_1 = 0,975 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кгс} (9,9388 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}); C_3 = 0,756 \cdot 10^{-5,5} \text{ см}^2/\text{кгс} (7,7064 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}).$$

В скобках указаны значения констант, переведенные в систему СИ. График функции  $C(t, \tau)$  для различных значений  $\tau$  в интервале  $t$  от 0 до 100 сут при использовании значений констант в системе СИ приведен на рис. 2.

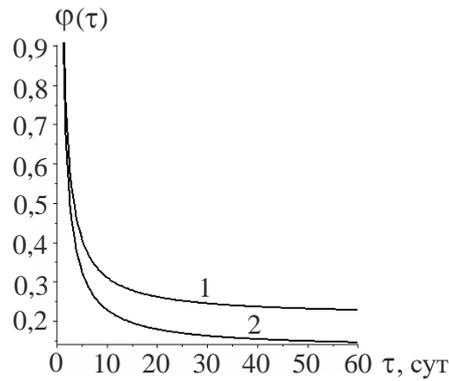


Рис. 1. График  $\varphi(\tau) = \frac{1}{A_1} \left( C_1 + \frac{1}{\tau} \right)$ :

1 —  $C_1 = 0,975 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кгс}$ ;  $A_1 = 4,62 \cdot 10^{-5} \text{ сут} \cdot (\text{кгс}/\text{см}^2)^{-1}$ ;  
 2 —  $C_1 = 0,238 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кгс}$ ;  $A_1 = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ сут} \cdot (\text{кгс}/\text{см}^2)^{-1}$

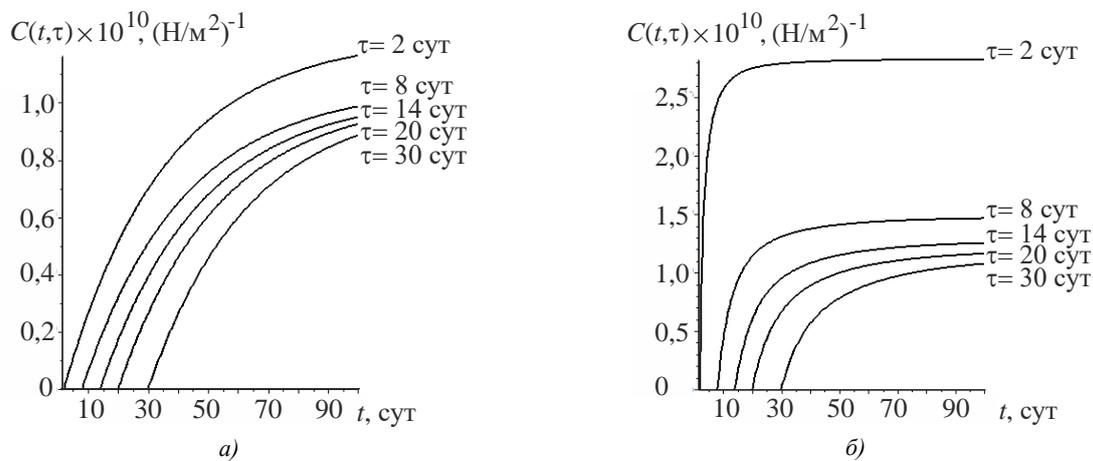


Рис. 2. Графики функций  $C(t, \tau)$ :

а — Н.Х. Арутюняна [1]; б — С.В. Александровского [3]

Сравнивая графики на рис. 2, а и 2, б при  $\tau = 2$  сут и  $t = 100$  сут, устанавливаем, что величины  $C(t, \tau)$ , вычисленные по формуле (2), почти в 2,5 раза превышают данные формулы (1). При  $\tau$  равном 8, 14, 20, 30 сут и  $t = 100$  сут значения  $C(t, \tau)$ , рассчитанные по формулам (1) и (2), мало отличаются. Следует также отметить более резкую начальную крутизну кривых  $C(t, \tau)$  на рис. 2, б по сравнению с рис. 2, а.

Для конечно-элементного анализа монолитных железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона связь между напряжениями и деформациями представим в операторно-матричной форме:

$$\{\sigma(t)\} = [E(t)](1 - R)\{\varepsilon(t)\},$$

где  $\{\sigma(t)\}$ ,  $\{\varepsilon(t)\}$  — векторы-столбцы напряжений и деформаций соответствующие моменту времени  $t$ ;  $[E(t)]$  — матрица упругости (в общем случае размерностью  $6 \times 66 \times 6$ );  $R\varepsilon_{ij} = \int_{\tau_1}^t R(t, \tau)\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau$ ,  $i, j = 1, 3$  — линейный интегральный оператор, устанавливающий соответствие между текущими деформациями  $\varepsilon_{ij}$  и «историей» длительного деформирования  $\varepsilon_{ij}(\tau)$ .

В подынтегральном выражении введена так называемая наследственная функция  $R(t, \tau)$  [3]. Известно, что от вида наследственной функции зависит реалистичность моделирования процесса ползучести, в частности учет отклика системы при частичном или полном снятии нагрузки. Применительно к теории ползучести бетона наследственного типа различают три основных направления [3, 4]: теория упругой наследственности; теория старения; теория упруго-ползучего тела. Рассмотрим более подробно основные особенности наследственных функций, составляющих основу каждой из перечисленных теорий.

В теории упругой наследственности полагается, что при разгрузке происходит полная обратимость (обнуление) деформаций. Наследственная функция в данном случае имеет вид [3]:

$$R(t - \tau) = E_0 C_1 \gamma e^{-\gamma(1 + E_0 C_1)(t - \tau)}, \tag{3}$$

где  $E_0$  — начальный модуль упругости;  $C_1, \gamma$  — константы, определяемые экспериментально по кривым ползучести.

График  $R(t, \tau)$ , построенный на основании выражения (3) для различных значений параметра  $\tau$ , приведен на рис. 3. Здесь и далее константы, входящие в (3), приняты такие же как в выражениях (1) и (2). Значение начального модуля упругости бетона  $E_0 = 2,55 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>. Для построения графика  $R(t, \tau)$  использована среда компьютерной математики системы Maple [6].

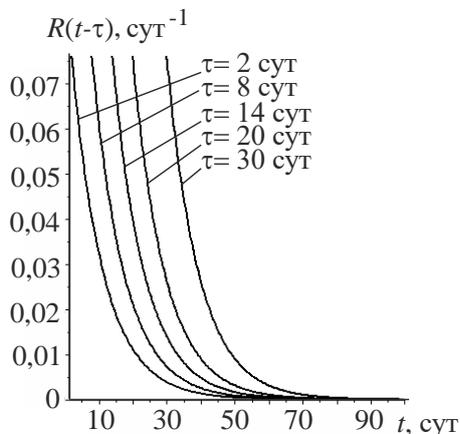


Рис. 3. График  $R(t, \tau)$  согласно теории упругой наследственности

Как видно, кривые на рис. 3 для различных значений  $\tau$  копируют друг друга со смещением. Это объясняется тем, что в выражении (3) модуль упругости принят постоянным, т. е. эффект «старения» материала в данной теории не учитывается. Теория упругой наследственности применима только к «старому» бетону. В этом случае полагается, что деформация ползучести зависит только от продолжительности действующей нагрузки.

Теория старения базируется на предположении о полном отрицании обратимости деформаций ползучести при частичной или полной разгрузке. Выражение для функции  $R(t, \tau)$ , учитывающее изменение деформационных свойств материала со временем, приведенное в монографии С.В. Александровского [3], имеет вид:

$$R(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ E(\tau) e^{-\int_{\tau}^t E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(\tau, \tau_1) d\tau} \right], \quad (4)$$

где  $E(t) = E_0(1 - e^{-\beta t})$  — аппроксимация модуля упругих деформаций (параметр  $\beta = 0,206$  сут<sup>-1</sup>);  $\tau_1$  — «возраст» бетона в момент загрузки, сут.

Визуализация функции  $R(t, \tau)$  в виде графика, выполненная на основании выражения (4) в среде Maple, показана на рис. 4.

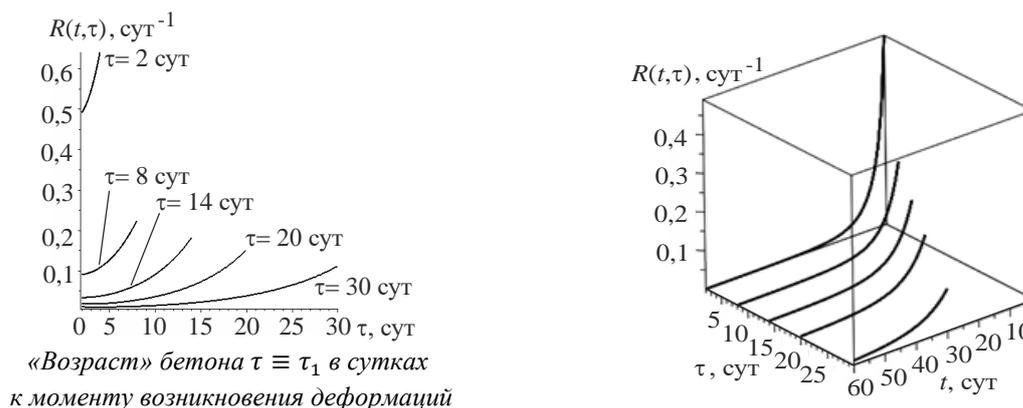


Рис. 4. График  $R(t, \tau)$  согласно теории старения

Как отмечается в [3], теория старения применима для расчетов бетонных и железобетонных конструкций при непродолжительном действии нагрузки. Причем в случае разгрузки данная теория приводит к существенному завышению деформаций последствия для «молодого» бетона и занижению этих деформаций для «старого» бетона.

Теория упруго-ползучего тела учитывает частичную обратимость деформаций ползучести при разгрузке. В монографии С.В. Александровского [3] в рамках теории упруго-ползучего тела предложено следующее выражение для наследственной функции бетона:

$$R(t, \tau) \approx -\frac{1}{E(t)} \{K^2(\tau)F'(\tau)(e^{\gamma\tau} - A_2) - K'(\tau) - [K(\tau) \left( \frac{e^{\gamma\tau} -}{A_2} \right) e^{-\eta(\tau)}] \int_{\tau}^t K(\tau)F'(\tau)e^{\eta(\tau)} d\tau + B_3(t)e^{-\mu(t)(t-\tau)}\}, \quad (5)$$

где  $(\dots)' = \partial \dots / \partial \tau$ ;  $B_3(t) = F'(t)(e^{\gamma t} - A_2)[E^2(t) - K^2(t)] - \alpha E^2(t)\Delta(t) + K'(t) - E'(t)$ ;

$$\mu(t) = \frac{1}{B_3(t)} \{B_3'(t) + \gamma e^{\gamma t} F'(t)[E^2(t) - K^2(t)] - F''(t)(e^{\gamma t} - A_2)^2 [E^3(t) - K^3(t)] - \alpha E(t)[E(t)\Delta(t)]' - \alpha^2 E^3(t) \frac{\Delta(t)}{K(t)} + \frac{1}{2} F'(t)(e^{\gamma t} - A_2)[E^2(t) - K^2(t)]' + 2\alpha E^3(t)\Delta(t)F'(t)(e^{\gamma t} - A_2)\};$$

$$K(t) = \frac{E(t)}{1 + \Delta(t)E(t)}.$$

Для быстро убывающей функции  $\Delta(t)$  в монографии [3] предложены следующие зависимости:

- 1)  $\Delta(t) = (0,25 + 0,99^{-\alpha t}) \cdot 10^{-5}$ ;
- 2)  $\Delta(t) = C_1 - C_3 + \frac{A_1 - A_3}{t}$ ;
- 3)  $\Delta(t) = \left(\frac{80}{t} + 2,714\right) \cdot 10^{-7}$ ;
- 4)  $\Delta(t) = (11,2 + 34 \cdot e^{-0,125 \cdot t}) \cdot 10^{-7}$ .

График функции  $\Delta(t)$ , построенный с использованием приведенных выражений для  $\Delta(t)$ , показан на рис. 5. Цифрами обозначены кривые, соответствующие номерам зависимостей  $\Delta(t)$ .

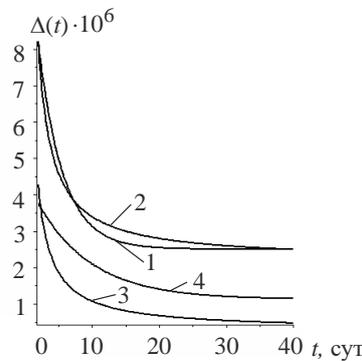


Рис. 5. График функции  $\Delta(t)$  для зависимостей 1, 2, 3, 4

Учитывая качественное совпадение кривых  $\Delta(t)$  на рис. 5, в дальнейшем будем использовать более универсальную зависимость (2).

Для придания формуле (5) вида, удобного для программирования, применим символьный процессор системы Maple [6]. Кривые функции  $R(t, \tau)$  для различного «возраста» бетона, полученные с помощью вычислительной технологии [7], представлены на рис. 6. На рис. 7 приведен аналогичный график  $R(t, \tau)$  из монографии [3]. Диапазон изменения параметра  $\tau$  на рис. 6 и 7 примерно совпадает.

Сравнивая графики  $R(t, \tau)$  на рис. 6 и 7, устанавливаем, что кривые наследственной функции при одинаковых значениях параметра  $\tau$  в пределах визуализации идентичны. Важно отметить, что на кривых  $R(t, \tau)$ , приведенных на рис. 6, отчетливо прослеживается учет так называемой быстро нарастающей ползучести, наблюдаемой на практике в момент времени  $t = \tau + \delta t$ , где  $\delta t \leq 1$  сут [3].

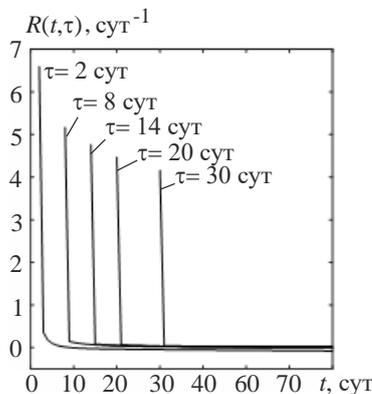


Рис. 6. График  $R(t, \tau)$  [7]

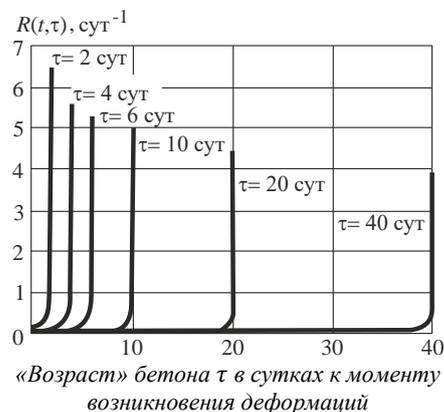


Рис. 7. График  $R(t, \tau)$  [3]

Для «старого» бетона в монографии [3] рекомендуется следующее выражение для наследственной функции:

$$R(t - \tau) = A_1 e^{-\rho_1(t-\tau)} + A_2 e^{-\rho_2(t-\tau)}, \quad (6)$$

где:

$$A_1 = \frac{E_0}{\rho_1 - \rho_2} \{(\gamma\psi_0 + \alpha\Delta_0)[E_0(\gamma\psi_0 + \alpha\Delta_0) - \rho_2] + \alpha^2\Delta_0 + \gamma^2\psi_0\};$$

$$A_2 = E_0(\gamma\psi_0 + \alpha\Delta_0) - A_1;$$

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2} \{ \alpha + \gamma + E_0(\gamma\psi_0 + \alpha\Delta_0) \pm \sqrt{E_0^2(\gamma\psi_0 + \alpha\Delta_0)^2 + (\alpha - \gamma)^2 - 2E_0(\gamma\psi_0 - \alpha\Delta_0)(\alpha - \gamma)} \}.$$

При вычислениях  $R(t - \tau)$  в выражении (6) принимаем  $\Delta(t) = \Delta_0 = const$ ,  $\psi(t) = \psi_0 = const$ .

**Результаты исследования.** В качестве первого тестового примера рассмотрим задачу о длительной деформации призматического бетонного образца цилиндрической формы при сжатии в осевом направлении. Результаты аналогичных физических экспериментов приведены в работе [8]. Диаметр и высота призматического образца, как и в [8], принимались равными 12 см и 30 см соответственно. К свободному торцу образца прикладывалось давление  $p = 15$  МПа. Учитывая осевую симметрию геометрии и нагружения при конечно-элементном моделировании, рассматривалась  $1/4$  часть призматического образца. Шаг сетки принимался равномерным и равным 1 см. При назначении граничных условий на торцах призмы вводились связи, препятствующие радиальным перемещениям. Таким образом, узлы свободного торца имеют только одну степень свободы в виде осевого перемещения  $u_z$ .

Для расчетов используем авторизированный комплекс Polygon [9, 10]. Полученные графики  $u_z \sim t$  для двух моделей бетона и двух схем нагружения приведены на рис. 8. Начальный модуль упругости бетона  $E = 2,8 \cdot 10^4$  МПа. Время наблюдения 200 сут. На правой части рис. 8 показан график  $u_z \sim t$  для режима нагружения и полной разгрузки при  $t = 60$  сут.

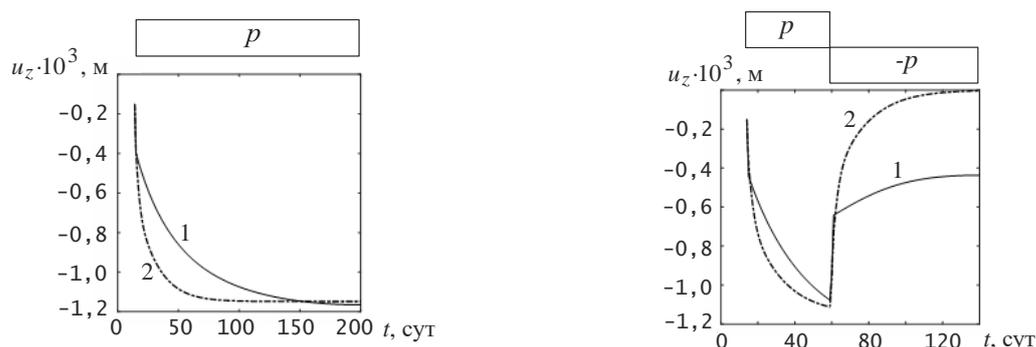


Рис. 8. Графики перемещения  $u_z$  призматического образца:  
1 — модель упруго-ползучего тела (5); 2 — модель «старого» бетона (6)

Как видно, для модели «старого» бетона (6) при разгрузке имеет место полная обратимость деформации ползучести.

Визуализация распределения полей осевых перемещений  $u_z$  и интенсивности напряжений  $\sigma_i$  для модели упруго-ползучего тела (5) и момента времени  $t = 60$  сут. представлена на рис. 9 и 10.



Рис. 9. Картина распределения  $u_z$  в  $1/4$  призматического образца при  $t = 60$  сут

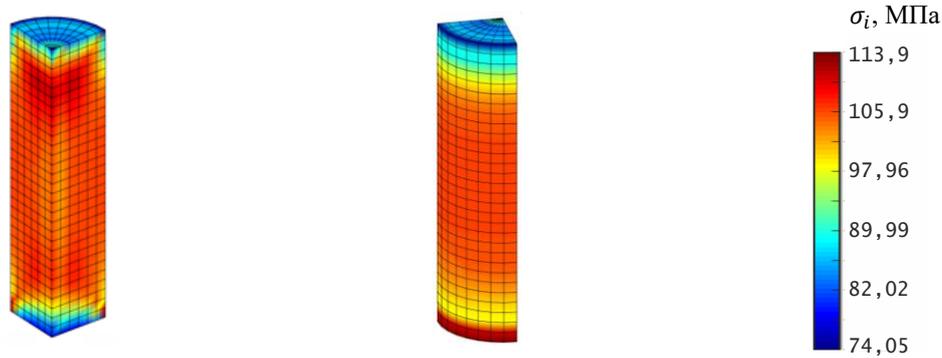


Рис. 10. Картина распределения  $\sigma_i$  в 1/4 призматического образца при  $t = 60$  сут

На рис. 10 отчетливо прослеживается влияние принятых граничных условий на распределение напряжений по высоте призмы. Наибольшая концентрация  $\sigma_i = 113,9$  МПа наблюдается на нижнем торце образца.

Для исследования точности разработанного математического и программного обеспечения использованы результаты натурных экспериментов на длительную ползучесть двухопорных балок при двухточечном нагружении, приведенные в [11]. В данных экспериментах предварительно напряженные железобетонные балки подвергались длительному (в течение 4,5 лет) силовому воздействию. Поддержание постоянной нагрузки  $F = const$  обеспечивалось гидравлическими домкратами.

Схема нагружения и варианты сечений балок приведены на рис. 11 и 12 соответственно (размеры указаны в миллиметрах).

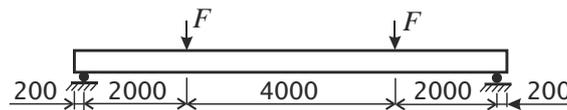


Рис. 11. Схема нагружения балки

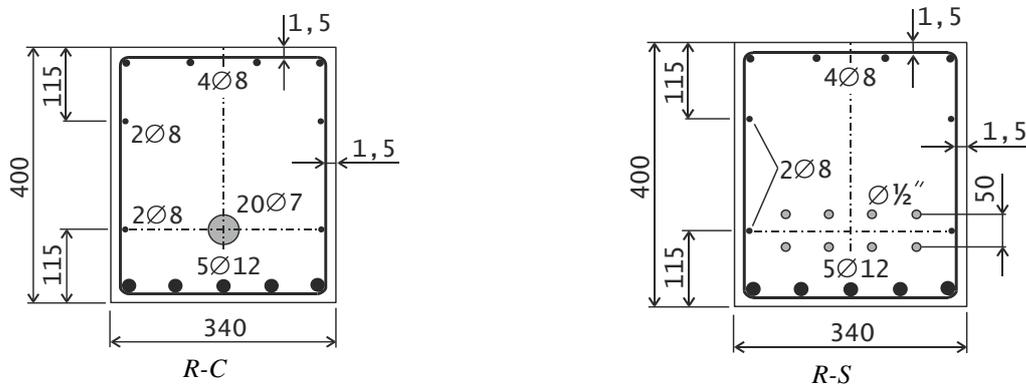


Рис. 12. Сечения балок серий R-C и R-S в середине пролета [11]

На этих рисунках показаны схемы размещения «фоновой» продольной и «активной» предварительно напряженной арматуры.

Согласно данным [11] в балках серии R-C создавалось начальное напряженное состояние путем обжатия бетона в «возрасте» 28 суток по торцам с помощью тросовой арматуры. Это так называемые балки с пост напряжением. Трос состоял из двадцати прядей номинальным диаметром 7,2 мм (площадь поперечного сечения одной пряди 38,70 мм<sup>2</sup>). Схема траектории «активного» армирования балки серии R-C представлена на рис. 13. При тестировании рассматривался вариант балки с параметрами:  $a = 0,115$  м;  $b = 0,227$  м. Предел прочности при растяжении для отдельной нити пряди  $f_{ptk}$  составляет 1770 МПа.

Преднапряжение в балке серии R-S создавалось по схеме натяжения арматуры на упоры. Через 28 суток после укладки бетона в соответствующую форму «активная» арматура «снималась» с упоров, и в балке возникало начальное напряженное состояние.

Напряжение в «активной» арматуре для балок серии R-C и R-S назначалось, исходя из условия:

$$\sigma = 0,7f_{ptk}.$$

Тогда для балки серии R-C имеем:

$$F_{pr} = \sigma n A_{R-C} = 0,7 \cdot 1770 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 38,7 \cdot 10^{-6} = 959 \text{ кН},$$

где  $n$  — число прядей троса ( $n = 20$ );  $A_{R-C}$  — площадь поперечного сечения пряди троса.

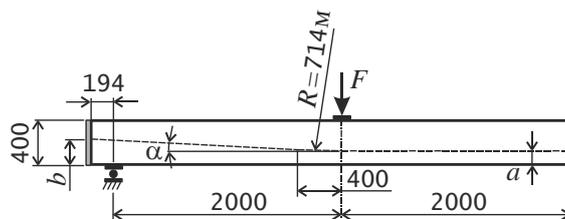


Рис. 13. Схема траектории «активного» армирования 1/2 части балки серии R-C

Для качественной и количественной оценки восстанавливающего эффекта, обусловленного натяжением троса в балке серии R-C, используем вспомогательную двухмерную конечно-элементную модель. Данная модель образована из ферменных и пружинных конечных элементов (рис. 14). При этом вертикальные реакции в пружинных элементах  $r_i$  эквивалентны дискретным значениям восстанавливающих усилий.

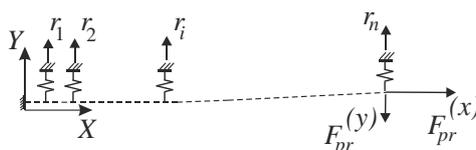


Рис. 14. Схема для определения восстанавливающей силы

В результате моделирования получаем:  $F_{pr}^{(x)} = 958$  кН;  $F_{pr}^{(y)} = 51,1$  кН. Эпюра распределения восстанавливающих усилий  $F_{rest}$  приведена на рис. 15.

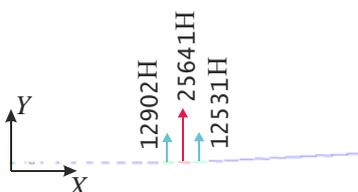


Рис. 15. Эпюра восстанавливающих усилий  $F_{rest}$

Преднапряжение в балке серии R-S создается восемь тросами  $\varnothing 1/2'$ . Номинальный диаметр каждого троса 10,9 мм (площадь сечения 93,3 мм<sup>2</sup>). Для данной серии усилие натяжения определяем по формуле:

$$F_{pr} = 0,7 \cdot 1860 \cdot 10^{-6} \cdot 93,3 \cdot 10^{-6} = 121,4 \text{ кН.}$$

Полагаем, что усилие  $q_{np}$  от предварительно растянутого троса в балке серии R-S действует на участке длиной  $l_p = 15 \cdot d$ , где  $d$  — диаметр арматуры (рис. 16). Величину  $q_{np}$  определяем как отношение  $F_{pr}/l_p$ .

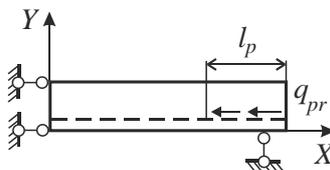


Рис. 16. Схема преднапряжения в балке серии R-S

Расчетная схема для 1/2 части балки серии R-C и соответствующая конечно-элементная модель с выделением массива бетона и арматурного каркаса приведены на рис. 17 и 18 соответственно. Величина силы, прикладываемой к 1/2 части балки,  $F_{sust} = 63,75$  кН. Для уменьшения концентрации напряжений в зонах приложения силы и опоре введены площадки толщиной 10 см. Материал площадок — сталь.

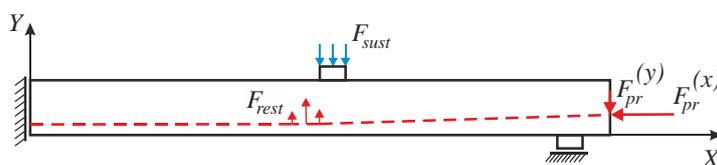


Рис. 17. Расчетная схема 1/2 части балки серии R-C

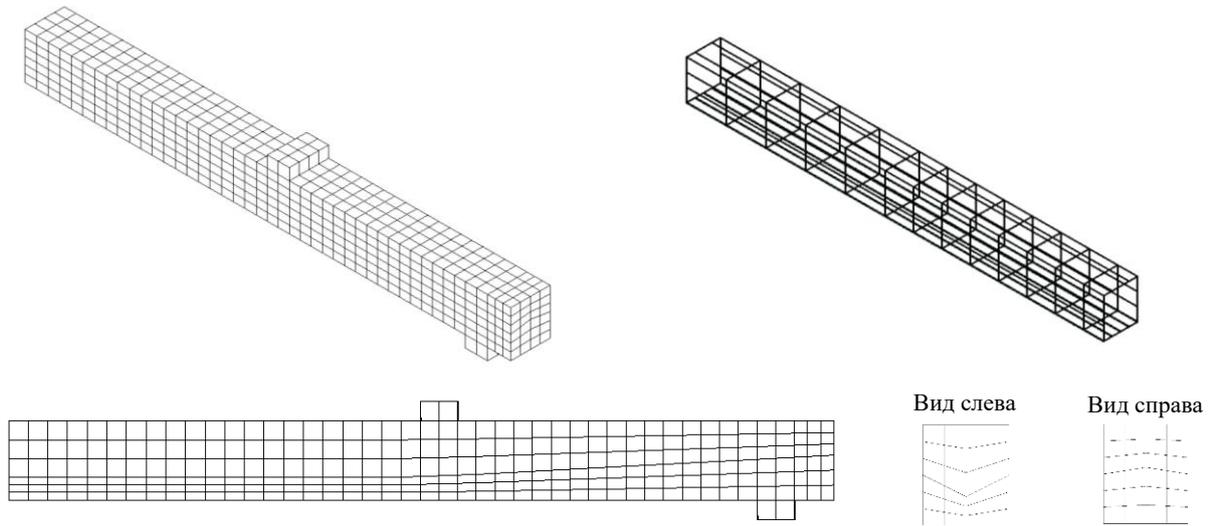


Рис. 18. Конечно-элементная модель 1/2 части балки серии R-C

Расчетная схема для 1/2 части балки серии R-S и соответствующая конечно-элементная модель с выделением массива и арматурного каркаса показаны соответственно на рис. 19 и 20.

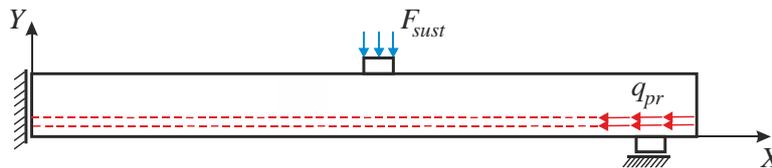


Рис. 19. Расчетная схема 1/2 части балки серии R-S

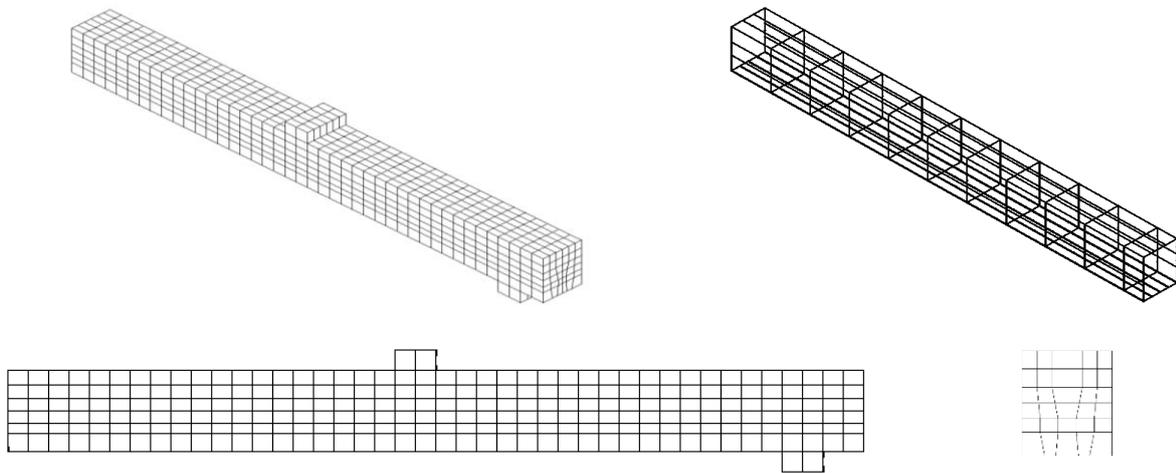


Рис. 20. Конечно-элементная модель 1/2 части балки серии R-S

Результаты конечно-элементного моделирования изменения прогиба  $u_y$  в центре пролета балок серий R-C и R-S на этапах преднапряжения в «возрасте» бетона 14 сут и нагружения силой  $F_{sust}$  в момент времени 28 сут представлены на рис. 21, а. Расчетное время наблюдения составило 100 сут. На рис. 21, б приведены графики  $u_y \sim t$ , полученные экспериментально [11].

Как видно из рис. 21, а и 21, б, значения прогибов, полученные численно и экспериментально, в моменты времени 28 сут и 100 сут практически совпадают.

Визуализация полей продольных  $\sigma_{xx}$  и касательных  $\sigma_{xy}$  напряжений для балки серии R-C (момент времени 100 сут) показана на рис. 22 и 23. Аналогичные картины распределения напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{xy}$  для балки серии R-S приведены на рис. 24 и 25. На рис. 22–25 представлены фрагменты балки, соответствующие участку  $0 \leq x \leq 3,71$  м, т. е. без зоны опирания.

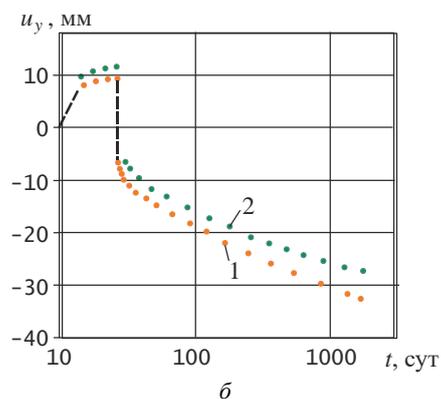
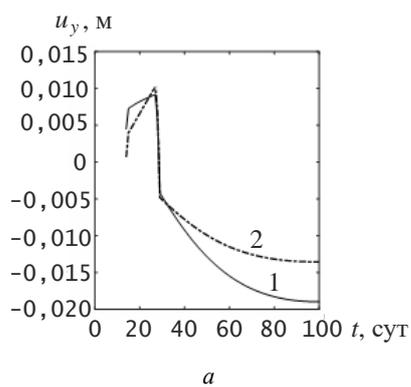


Рис. 21. Графики  $u_y \sim t$ : 1 — балка серии R-C; 2 — балка серии R-S

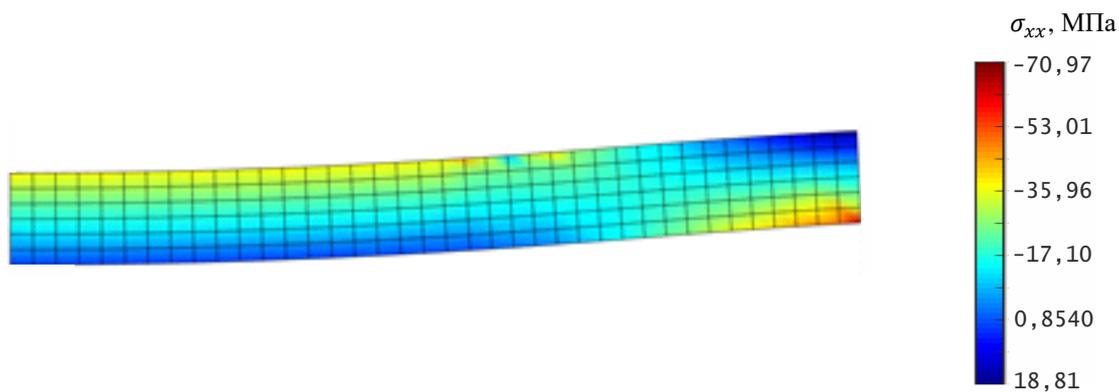


Рис. 22. Визуализация распределения  $\sigma_{xx}$  для балки серии R-C,  $t = 100$  сут

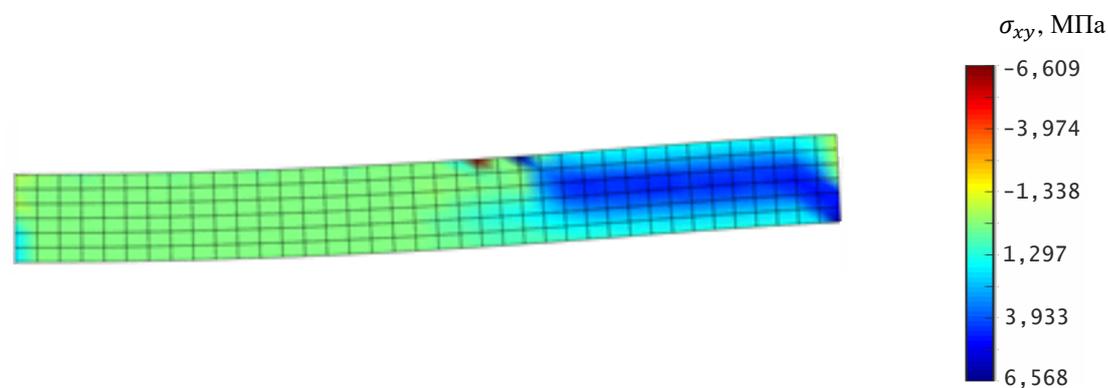


Рис. 23. Визуализация распределения  $\sigma_{xy}$  для балки серии R-C,  $t = 100$  сут

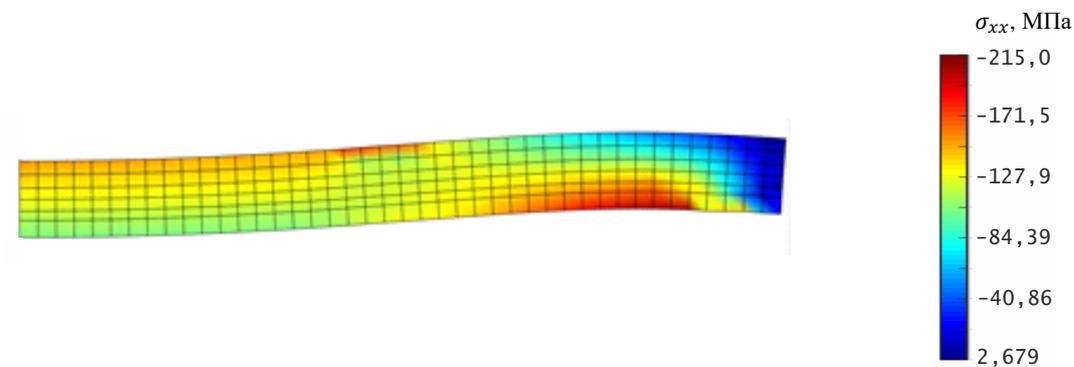


Рис. 24. Визуализация распределения  $\sigma_{xx}$  для балки серии R-S,  $t = 100$  сут

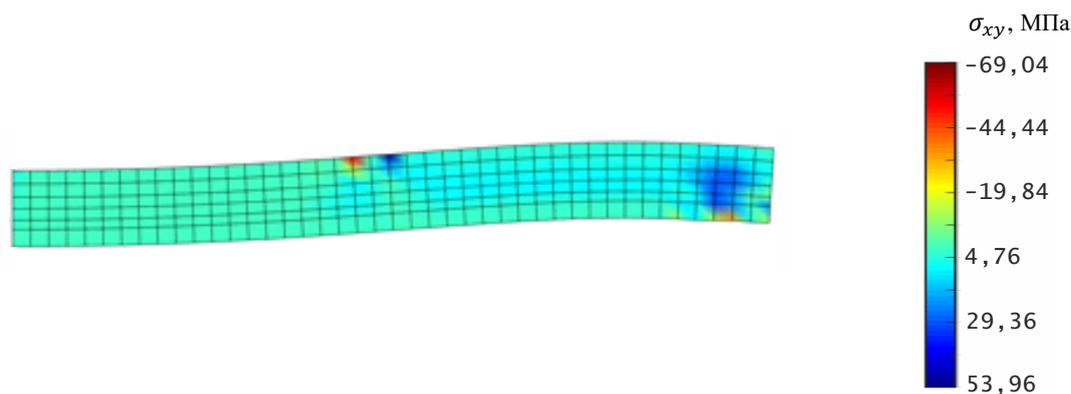


Рис. 25. Визуализация распределения  $\sigma_{xy}$  для балки серии R-S,  $t = 100$  сут.

Из приведенных результатов видно, что эффект от предварительного напряжения у балки серии R-S является более выраженным, чем у балки серии R-C. Так, у балки серии R-C при нагружении заданной силой  $F_{sust}$  в нижнем слое образуются растягивающие напряжения  $\sigma_{xx} = 18,8$  МПа, в то время как в балке серии R-S при такой же нагрузке в этой области наблюдаются сжимающие напряжения порядка 100 МПа.

Определенный интерес представляет картина распределения напряжений  $\sigma_{xy}$  для рассмотренных схем балок (рис. 23 и 25). Сравнивая данные на рис. 23 и 25, устанавливаем, что более однородное поле напряжений  $\sigma_{xy}$  соответствует балке серии R-S. Незначительные возмущения в распределении  $\sigma_{xy}$  для этой балки наблюдаются в месте приложения нагрузки и области, прилегающей к опоре. При этом следует отметить, что фоновое армирование для балок обеих серий назначалось практически идентичным.

**Обсуждение и заключение.** Таким образом, анализ распределения перемещений и напряжений в рассмотренных железобетонных балках с учетом ползучести бетона и предварительного напряжения, создаваемого треновой арматурой, позволяет сделать следующее заключение.

1. Распределенная схема «фоновой» армирования с физической точки зрения позволяет наиболее реалистично моделировать совместную работу армирующего каркаса и бетонного массива.
2. Предложенная концепция определения восстанавливающего усилия, обусловленного натяжением «активной» арматуры, может быть реализована в программных комплексах ANSYS, Лира САПР и SCAD Office, сертифицированных Российской академией архитектуры и строительных наук.
3. Установлено, что значения прогибов рассмотренных балок, полученные численно и экспериментально, для моментов времени 28 сут и 100 сут практически совпадают.
4. Анализ полей продольных и касательных напряжений в балках серии R-C и R-S для момента времени 100 суток выявил существенное влияние схемы «активного» армирования на несущую способность исследуемых конструкций в плане появления растягивающих напряжений в бетоне.

Разработанное математическое и программное обеспечение позволяет повысить точность и надежность прочностных расчетов монолитных предварительно напряженных балочных конструкций из железобетона.

#### Список литературы / References

1. Арутюнян Н.Х. *Некоторые вопросы теории ползучести*. М.: Гостехтеоретиздат; 1952. 323 с.  
Narutyunyan NH. *Some Issues of the Theory of Creep*. Moscow: Gostekhtheoretizdat; 1952. 323 p. (In Russ.).
2. Арутюнян Н.Х., Зевин А.А. *Расчет строительных конструкций с учетом ползучести*. М.: Стройиздат; 1988. 256 с.  
Narutyunyan NH, Zevin AA. *Calculation of Building Structures Considering Creep*. Moscow: Stroyizdat; 1988. 256 p. (In Russ.).
3. Александровский С.В. *Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести*. М.: Стройиздат; 1973. 432 с.  
Aleksandrovsky SV. *Calculation of Concrete and Reinforced Concrete Structures for Temperature and Humidity Changes Considering Creep*. Moscow: Stroyizdat; 1973. 432 p. (In Russ.).
4. Прокопович И.Е., Зедгенидзе В.А. *Прикладная теория ползучести*. М.: Стройиздат; 1980. 240 с.  
Prokopovich IE, Zedgenidze VA. *Applied Theory of Creep*. Moscow: Stroyizdat; 1980. 240 p. (In Russ.).
5. Харлаб В.Д. *Принципиальные вопросы линейной теории ползучести (с привязкой к бетону)*. СПб.: СПбГАСУ; 2014. 207 с.  
Kharlab VD. *Fundamental Issues of the Linear Theory of Creep (in Relation to Concrete)*. St. Petersburg: SPbGASU; 2014. 207 p. (In Russ.).

6. Дьяконов В.П. *Математическая система MAPLE V R3/R4/R5*. М.: СОЛОН; 1998. 399 с.  
Dikonov VP. *The MAPLE Mathematical System in R3/R4/R5*. Moscow: SOLON; 1998. 399 p. (In Russ.).
7. Гайджуров П.П., Исхакова Э.Р. Модели теории ползучести бетона и их конечноэлементная реализация. *Вестник ДГТУ*. 2012;7:99–107. URL: <https://www.vestnik-donstu.ru/jour/article/view/654/653> (дата обращения 05.01.2025).  
Gaydzhurov PP, Iskhakova ER. *Models of Concrete Creep Theory and their Finite Element Implementation*. Bulletin of DSTU. 2012;7:99-107. (In Russ.) URL: <https://www.vestnik-donstu.ru/jour/article/view/654/653> (accessed: 05.01.2025).
8. Ross AD. Creep of Concrete under Variable Stress. *Journal of the American concrete institute*. 1958;54(3): 739–758. <https://doi.org/10.14359/11466>
9. Гайджуров П.П., Исхакова Э.Р. *Конечноэлементное решение плоской задачи теории наследственного старения бетона с учетом принципа наложения воздействий и быстронабегающей ползучести материала (Polygon)*. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 201462079. 2014.  
Gaydzhurov PP, Iskhakova ER. *Finite Element Solution of the Planar Issue of the Theory of Hereditary Aging of Concrete Considering the Principle of Superposition of Impacts and Fast-Moving Creep of the Material (Polygon)*. Certificate of State Registration of the Computer Program No. 201462079. 2014. (In Russ.).
10. Гайджуров П.П., Исхакова Э.Р., Савельева Н.А. Численное моделирование объемного напряженно-деформированного состояния предварительно напряженных железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки*. 2023;2:17–24. <http://dx.doi.org/10.17213/1560-3644-2023-2-17-24>  
Gaydzhurov PP, Iskhakova ER, Savelyeva NA. Numerical Modeling of the Volumetric Stress-Strain of Prestressed Reinforced Concrete Structures Considering the Creep of Concrete. News of higher educational institutions. *The North Caucasus region. Technical Sciences*. 2023;2:17-24. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.17213/1560-3644-2023-2-17-24>
11. Reybrouck N, Van Mullem T, Taerwe L, Caspeele R. Influence of long-term creep on prestressed concrete beams in relation to deformations and structural resistance: Experiments and modeling. *Structural Concrete*. 2020;21(4):1458–1474. <https://doi.org/10.1002/suco.201900418>

#### **Об авторах:**

**Гайджуров Петр Павлович**, доктор технических наук, профессор кафедры строительной механики и теории сооружений Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID, gpp-161@yandex.ru](mailto:gpp-161@yandex.ru)

**Исхакова Эльвира Рашидовна**, кандидат технических наук, ассистент кафедры градостроительства, проектирования зданий и сооружений Южно-Российского государственного политехнического университета им. М.И.Платова (НПИ) (346428, Российская Федерация, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132), [ORCID, elvira.ishakova@yandex.ru](mailto:elvira.ishakova@yandex.ru)

**Савельева Нина Александровна**, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры строительной механики и теории сооружений Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID, ninasav86@mail.ru](mailto:ninasav86@mail.ru)

#### **Заявленный вклад авторов:**

**П.П. Гайджуров:** постановка задачи, выбор метода решения, обсуждение результатов.

**Э.Р. Исхакова:** написание кода и отладка программного обеспечения, подготовка исходных данных для численного моделирования.

**Н.А. Савельева:** разработка математической модели ползучести бетона, подготовка текста, формулирование выводов.

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.**

#### **About the Authors:**

**Peter P. Gaydzhurov**, Dr.Sci. (Eng.), Professor of the Department of Structural Mechanics and Theory of Structures, Don State Technical University (1 Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID, gpp-161@yandex.ru](mailto:gpp-161@yandex.ru)

**Elvira R. Iskhakova**, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Urban Planning, Design of Buildings and Structures, Platov South Russian State Polytechnic University (NPI) (132 Prosveshcheniya St., Novocherkassk, 346428, Russian Federation), [ORCID, elvira.ishakova@yandex.ru](mailto:elvira.ishakova@yandex.ru)

**Nina A. Savelyeva**, Cand.Sci. (Eng.), Senior Lecturer of the Department of Structural Mechanics and Theory of Structures, Don State Technical University (1 Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID, ninasav86@mail.ru](mailto:ninasav86@mail.ru)

***Claimed contributorship:***

**PP Gaydzhurov:** basic concept formulation, selecting the solution method, analysis and generalization of the research results.

**ER Iskhakova:** writing and fixing the software code, preparing the original data for numerical modelling.

**NA Savelyeva:** developing the mathematical model of concrete creep, working with the text of the manuscript, analysis and generalization of the research results.

***Conflict of interest statement: the authors do not have any conflict of interest.***

***All authors have read and approved the final version of manuscript.***

**Поступила в редакцию / Received 14.01.2025**

**Поступила после рецензирования / Reviewed 30.01.2025**

**Принята к публикации / Accepted 08.02.2025**